

Estimation af CES-produktionsfunktioner med Törnqvist - eller Paasche-kædeprisindekset som approksimation for CES prisindekset.

- Et Monte Carlo simulationsstudie

Andreas Østergaard Iversen
Danish Rational Economic Agents Model, DREAM

DREAM Arbejdsrapport 2012:4
December 2012

Arbejdsrapporten undersøger via Monte Carlo simulationer konsekvenserne af at bruge et Törnqvist- eller et Paasche- kædeprisindeks i stedet for det teoretisk korrekte CES-prisindeks i estimationen af CES produktionsfunktioner. I notatet undersøges dette både for en model med og uden teknologisk fremskridt.

Indhold

Indledning	3
Constant Elasticity of Substitution produktionsfunktion.....	3
Hicks -neutral teknologisk fremskridt	4
Harrod -neutral teknologisk fremskridt.....	5
Valg af alternativt prisindeks	5
Monte Carlo eksperiment.....	6
Den data genererende proces.....	7
Estimation.....	8
Resultater	9
Konklusion	11
Bilag 1. CES produktionsfunktion med 2 input.....	12
Bilag 2. CES produktionsfunktion med 2 input og teknologisk fremskridt.	14
Bilag 3. Monte Carlo – Intet teknologisk fremskridt.....	18
Bilag 4. Monte Carlo – Hicks neutralt teknologisk fremskridt.....	19
Bilag 5. Monte Carlo– Harrod neutralt teknologisk fremskridt.	20

Indledning

Følgende notat undersøger via Monte Carlo simulationer konsekvenserne af at bruge et Törnqvist- eller et Paasche- kædeprisindeks i stedet for det teoretisk korrekte CES-prisindeks i estimationen af CES produktionsfunktioner. I notatet undersøges dette både for en model med og uden teknologisk fremskridt.

CES-prisindekset er det korrekte i ligevægt, men i estimationsøjemed er der en stor ulempe forbundet med dette prisindeks. Ulempen består i, at CES-prisindeks er endogent, da det afhænger af de estimerede parametre. For at forenkle estimationen vælges det ofte at anvende et alternativt prisindeks, der ikke afhænger af de estimerede parametre.

Indledningsvist skal det bemærkes, at den ikke-nestede CES produktionsfunktion kan estimeres uden brug af CES prisindekset, men da fokus for dette papir netop er CES-prisindekset er denne metode ikke benyttet. Den ikke-nestede produktionsfunktion er valgt udelukkende for at simplificere notationen og Monte Carlo eksperimenterne. Resultaterne fra papiret kan generaliseres direkte til det nastede tilfælde. Analysen er relevant, da et nestet CES produktionsfunktion vil afhænge af CES-prisindeket.

Constant Elasticity of Substitution produktionsfunktion

Følgende opskriver CES, Constant Elasticity of Substitution, produktionsfunktionen med og uden et teknologisk fremskridt. Den klassiske CES produktionsfunktion med 2 input faktorer, fx arbejdskraft og kapital, kan skrives som:

$$(0.1) \quad F(x_{1,t}, x_{2,t}) = y = \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} x_{1,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} x_{2,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

Hvor y er outputtet, x_1 og x_2 er de to input-faktorer og hvor γ og σ er parametre. γ bestemmer den optimale fordeling af inputs og σ bestemmer den (konstante) substitutionselasticitet mellem inputs. I Bilag 1 gennemgås løsningen af Lagrange-optimeringsproblemet, som fremkommer når man har en CES- produktionsfunktion med 2 input og skal bestemme de optimale niveauer af produktionsfaktorer. For et givet output, \bar{y} , er det optimale niveau for x_1 og x_2 givet ved:

$$x_{1,t}^* = \bar{y} \gamma_1 \left(\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}^{ces}} \right)^{-\sigma}, \quad x_{2,t}^* = \bar{y} \gamma_2 \left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{ces}} \right)^{-\sigma},$$

hvor $p_{12,t}^{ces}$ er et CES prisindeks, der er givet ved:

$$(0.2) \quad p_{12,t}^{ces} = (\gamma_1 p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 p_{2,t}^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}$$

Det gælder også, at det optimale forhold mellem produktionsfaktorerne er givet ved:

$$(0.3) \quad \frac{x_{1,t}^*}{x_{2,t}^*} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{-\sigma}$$

Hicks -neutral teknologisk fremskridt

Over tid må det formodes at produktionen har oplevet et teknologisk fremskridt, produktionsfunktionen er med andre ord ikke konstant over tid. Det klassiske eksempel er, at inputtet af arbejdskraft i princippet kan være konstant både i mængde og pris, men alligevel give anledning til forøget output, fx pga. kurser. En måde at korrigere for teknologisk fremskridt er, at opgøre alle inputs i effektive enheder, men dette er ofte ikke tilgængeligt i data og derfor vælges det ofte at approksimere det teknologiske fremskridt med trends.

Hvis data indeholder teknologisk fremskridt og der ikke tages højde for dette i estimationen, vil det resultere i ustabile estimater af parametrene.

I det følgende udvides den nestede CES produktionsfunktion med et Hicks og Harrod- neutral teknologisk fremskridt. Et teknologisk fremskridt anses for hicks-neutralt hvis fremskridtet ikke påvirker balancen mellem inputfaktorerne i produktionsfunktion. Det antages, at produktionsfunktionens teknologiske fremskridt følger en log-lineær og/eller en ikke-lineær trend.

En CES produktionsfunktion med 2 input og hicks-neutralt teknologisk fremskridt, λt , er givet ved:

$$(0.4) \quad F(x_{1,t}, x_{2,t}) = y_t = \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda t} x_{1,t} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda t} x_{2,t} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

Bilag 2 gennemgår optimeringsproblemet. Med hicks-neutralt teknologisk fremskridt er det optimale input givet ved:

$$(0.5) \quad x_{1,t}^* = \bar{y} e^{\lambda t(\sigma-1)} \gamma_1 \left(\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}^{ces-hicks}} \right)^{-\sigma}, \quad x_{2,t}^* = \bar{y} e^{\lambda t(\sigma-1)} \gamma_2 \left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{ces-hicks}} \right)^{-\sigma},$$

Hvor $p_{12,t}^{ces-hicks}$ er et CES prisindeks, der er givet ved

¹ I Bilag 2 er ligning (0.5) reduceret yderligere, men til nedenstående Monte Carlo eksperimenter er dette udtryk mest hensigtsmæssig.

$$p_{12,t}^{CES-hicks} = \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} p_{2,t}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Igen gælder det at optimale forhold mellem produktionsfaktorerne er givet ved ligning (0.3)

Harrod -neutralt teknologisk fremskridt

Et teknologisk fremskridt anses for Harrod-neutralt hvis fremskridtet kan påvirke balancen mellem inputfaktorerne i produktionsfunktion.

En CES produktionsfunktion med 2 input og Harrod-neutralt teknologisk fremskridt er givet ved:

$$(0.6) \quad F(x_{1,t}, x_{2,t}) = y_t = \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_{1,t} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} x_{2,t} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

Bemærk; at hvis $\lambda_1 = \lambda_2$ er ligning (0.6) lig med ligning (0.4) og produktionsfunktion er derfor Hicks-neutral. Hvorimod er $\lambda_1 \neq \lambda_2$, kan balancen mellem inputfaktorerne i produktionsfunktion blive påvirket af det teknologiske fremskridt.

Bilag 2 gennemgår optimeringsproblemet for en produktionsfunktion med Harrod -neutralt teknologisk fremskridt. De optimale inputfaktorer i niveau er givet ved:

$$(0.7) \quad x_{1,t}^* = \bar{y} e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} \gamma_1 \left(\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}^{ces-harrod}} \right)^{-\sigma}, \quad x_{2,t}^* = \bar{y} e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} \gamma_2 \left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{ces-harrod}} \right)^{-\sigma},$$

$$\text{Hvor } p_{12,t}^{CES-harrod} = \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} p_{2,t}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Det optimale forhold mellem produktionsfaktorerne er under antagelse af Harrod -neutralt teknologisk fremskridt givet ved:

$$(0.8) \quad \frac{x_{1,t}^*}{x_{2,t}^*} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t(\sigma-1)} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{-\sigma}.$$

Valg af alternativt prisindeks

Det fremgår af ovenstående afsnit at, den optimale input til produktionsfunktionen afhænger af et CES prisindeks af inputpriser. Dette prisindeks er det korrekte i ligevægt, men i estimationsøjemed er der en vis ulempe forbundet med dette prisindeks. Ulempen består i, at

CES-prisindekset er endogent da det afhænger af de estimerede parametre, dette gør regressionen meget ikke-lineær og besværliggør derfor estimationen.

For at forenkle regressionen vælges det at anvende et alternativt prisindeks, der ikke afhænger af de estimerede parametre. I nærværende notat er Törnqvist- og Paasche-kædeprisindekset valgt som en approksimation for det teoretisk korrekte CES prisindeks.

Törnqvistkædeprisindeks er defineret som:

(0.9)

$$p_{12,t}^{\text{Törnqvist}} = p_{12,t-1}^{\text{Törnqvist}} \left(\frac{p_{1,t}}{p_{1,t-1}} \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{p_{1,t-1}X_{1,t-1} + p_{1,t}X_{1,t}}{p_{1,t-1}X_{1,t-1} + p_{2,t-1}X_{2,t-1} + p_{1,t}X_{1,t} + p_{2,t}X_{2,t}} \right)} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} \right)^{\frac{1}{2} \left(\frac{p_{2,t-1}X_{2,t-1} + p_{2,t}X_{2,t}}{p_{1,t-1}X_{1,t-1} + p_{2,t-1}X_{2,t-1} + p_{1,t}X_{1,t} + p_{2,t}X_{2,t}} \right)}$$

Paaschekædeprisindeks er defineret som:

$$(0.10) \quad p_{12,t}^{\text{Paasche}} = p_{12,t-1}^{\text{Paasche}} \left(\frac{p_{1,t}X_{1,t} + p_{2,t}X_{2,t}}{p_{1,t-1}X_{1,t} + p_{2,t-1}X_{2,t}} \right)$$

Fordelen ved at bruge prisindeksene er som nævnt, at de kan bestemmes på baggrund af observerede priser og mængder, og kan derfor betragtes som eksogene i selve estimationen.

Törnqvistprisindekset er et superlativt prisindeks og dermed en god approksimation til et vilkårligt prisindeks. Idet Törnqvistprisindekset behandler priser og mængder ligeligt på tværs af perioder, og omkring det samme punkt er Törnqvistprisindekset en andenordens approksimation til dobbeltdifferentiable funktioner. Dette betyder, at selvom man er langt fra ligevægten kan Törnqvistprisindekset stadig være en god approksimation. Paaschekædeprisindeks har mange af de samme fordele som Törnqvistprisindekset, men er ikke helt så fleksibelt, Paaschekædeprisindeks er det officielle Nationalregnskabs prisindeks, og derfor almindelig kendt og udbredt.²

Monte Carlo eksperiment.

Følgende afsnit undersøger, via Monte Carlo eksperimenter, konsekvenserne af at bruge et Törnqvist eller Paasche - kædeprisindeks i stedet for det teoretisk korrekte CES prisindeks i estimationen af CES produktionsfunktion. Dette undersøges både for en model med og uden teknologisk fremskridt.

² For mere information om aggregerede prisindeks se Danmarks Statistiks dokumentation om Forbruger- og Nettoprisindekset kapitel 6: <http://www.dst.dk/pukora/epub/upload/8679/helepubl1.pdf>

Den data genererende proces.

Data konstrueres med udgangspunkt i de ovenover beskrevne CES produktionsfunktioner med 2 inputfaktorer, jf. ligning (0.1), ligning (0.4) og ligning (0.6). I udgangspunktet er data konstrueret over 100 perioder.

Priserne på de 2 input, $p_{1,t}$ og $p_{2,t}$, er i periode $t=1$ nummeret til 1, væksten i priserne er trukket fra en normalfordeling med eksogen middelværdi, μ , og varians, ω_p^2 :

$$p_{i,t=1} = 1$$

$$p_{i,t} = p_{i,t-1} + \Delta p_{i,t}, \text{ for } t > 1$$

Hvor $i = \{1,2\}$ og $\Delta p_{i,t} \sim N(\mu, \omega_p)$.

Nu kan det generelle Harrod CES-prisindekset konstrueres:

$$p_{12,t}^{CES-harrod} = \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} p_{2,t}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Hvor γ_i, λ_i og σ er eksogene parametre. Bemærk at $\lambda_i = 0$ giver det normale CES prisindeks og $\lambda_1 = \lambda_2$ giver hicks – CES prisindekset.

Endelig kan de optimale inputsandele bestemmes:

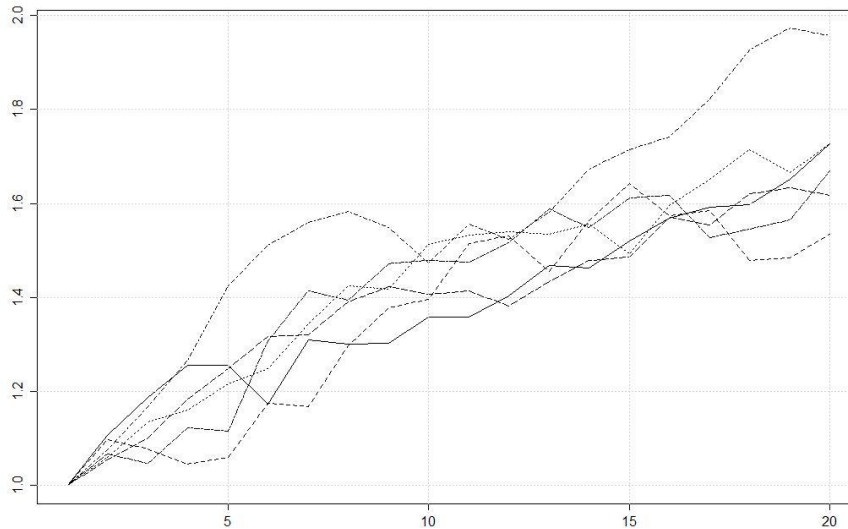
$$\frac{x_{i,t}}{x_{12,t}} = e^{\lambda_i t(\sigma-1)} \gamma_i \left(\frac{p_{i,t}}{p_{12,t}^{CES-harrod}} \right)^{-\sigma} + \epsilon_{i,t}$$

Hvor $\epsilon_{i,t} \sim \ln N(0, \omega_x)$ for $i = \{1,2\}$

Med udgangspunkt i det genererede data, konstrueres Törnqvistkædeprisindekset og Paaschekædeprisindekset ud fra henholdsvis ligning (0.9) og (0.10).

I Eksperimentet er væksten i priserne trukket fra en normalfordeling med middelværdi, $\mu=0,02$, og varians $\omega^2 = 0,009$, med andre ord antages det at der i gennemsnit er 2 procent vækst i priserne. Figur 1 viser seks realiseringer af denne proces. Det ses fra figuren at processerne tilnærmelsesvis minder om den man ser i data.

Figur 1. Seks realiseringer af priserne med vækst $\Delta p_t \sim N(0.02, 0.06)$



Den optimale fordeling af inputs er valgt til $\gamma_i = 0.5$, substitutionselasticiteten er valgt til $\sigma = \{0.8, 1.8\}$. Eksperiment er udført under antagelsen af ingen teknologiske fremskridt i produktionsfunktionen, $\lambda_i = 0$, under antagelsen om Hicks-neutralt teknologisk fremskridt, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, og endelig Harrod-neutralt teknologisk fremskridt, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Estimation

De teoretiske optimale inputfaktorer til CES produktionsfunktion med teknologisk fremskridt, ligning (0.7), omskrives til følgende regressionsligningssystem:

$$(0.11) \quad \begin{pmatrix} \log\left(\frac{x_{1,t}^*}{x_{12,t}^*}\right) \\ \log\left(\frac{x_{2,t}^*}{x_{12,t}^*}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(\gamma_1) \\ \log(\gamma_2) \end{pmatrix} + (\sigma - 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 t \\ \lambda_2 t \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} \log\left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{index}}\right) \\ \log\left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{index}}\right) \end{pmatrix} + \epsilon_t$$

Hvor, γ_i, λ_i og σ er parametrene der ønskes estimeret, bemærk at σ er en fælles parameter der bestemmes simultant i systemet. $p_{12,t}^{index}$ er det alternative eksogene prisindeks, der erstatter det teoretisk korrekte CES-prisindeks, $p_{12,t}^{index} = \{p_{12,t}^{Törnqvist}, p_{12,t}^{Paasche}\}$. Det ikke-lineære system estimeres med OLS via R pakken systemfit³

³ <http://cran.r-project.org/web/packages/systemfit/systemfit.pdf>

Den data generende proces og estimationen gentages 10.000 gange, for hver af gentagelserne gemmes de estimerede parametre, γ_i, λ_i og σ . Derudover gemmes standartfejlen på parametrene.

Resultater

Monte Carlo resultaterne kan ses i Bilag 3 til Bilag 5. I tabellerne er der rapporteret følgende: Den faktiske parametre værdi, β ⁴, der er brugt i den data generende proces, og gennemsnittet af parameterestimateterne over de 10.000 gentagelser, $mean(\beta)$, standartfejlen af parameterestimateterne over de 10.000 gentagelser, $std(\beta)$ og endelige gennemsnittet af standart fejlen over de 10.000 gentagelser, $mean(v)$ ⁵.

I Bilag 3 ses at estimationen af CES produktionsfunktionen uden teknologiske fremskridt ikke giver anledning til en bias i estimation af parametrene. Dette gælder både når Törnqvistkædeprisindekset eller Paaschekædeprisindekset bruges som det alternative prisindeks til CES- prisindekset.

I Bilag 4 ses resultaterne af Monte Carlo eksperimentet med CES produktionsfunktionen med Hicks neutralt teknologiske fremskridt. Estimationen af parametrene giver et ikke-biased estimat. Det skal dog bemærkes dog at parameteren for det teknologiske fremskridt er estimeret med modsat fortegn. Det forklares af ligning (0.35), hvor det ses at λ ingen går med et negativt fortegn. Igen ses det, at der ikke er den store forskel mellem brugen af de to eksogene prisindeks.

I Bilag 5 ses resultaterne af Monte Carlo eksperimentet med CES produktionsfunktionen med Harrod neutralt teknologisk fremskridt. Generelt er konstant-ledet og parameteren for det teknologiske fremskridt estimeret med stor usikkerhed og bias. Det skal dog bemærkes, at estimatet af disse parametre er ens med de to prisindeks, hvilket kunne tyde på en forkert fortolkning af parametrene i regressionsligningen. En dybere forståelse af fortolkningen af disse parametre kunne være et oplagt emne for et fremtidigt notat. Ofte er det substitutionselasticiteten vi er interesseret i, og derfor kan et uforståeligt estimat af konstant-leddet og trendparametrene måske accepteres, hvis substitutionselasticiteten er estimeret præcist og uden bias.

⁴ β er parametervektoren $\beta = (\lambda_i, \gamma_i, \sigma)$ for $i = \{1, 2\}$ og $\hat{\beta}$ er den estimerede parametre vektor hvor $\hat{\beta} = (\hat{\lambda}_i, \hat{\gamma}_i, \sigma)$.

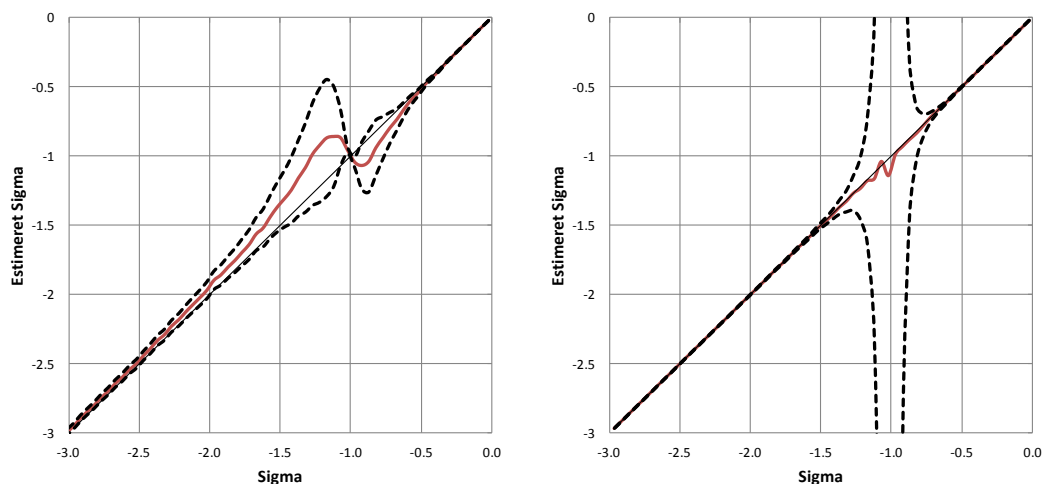
⁵ v er standartfejl vektoren $v = (std(\lambda_i), std(\gamma_i), std(\sigma))$ for $i = \{1, 2\}$, og \hat{v} en vektor med de estimerede er standart fejl.

Estimationen af substitutionselasticiteten, σ , giver generelt et ikke-biased estimat. Men det ses, at for en datagenerende proces med en substitutionselasticitet 0.8 medfører estimation med et Paascheindeks en positiv bias på 0.1. Forklaringen herpå er at Paascheindekset er en dårlige approksimation for CES prisindekset når CES produktionsfunktionen har et Harrod neutralt teknologisk fremskridt og en substitutionselasticitet er tæt på 1. Dette udbydes i punktdiagrammerne,

Figur 2. Her er Monte Carlo eksperimentet gentaget for 60 forskellige værdier af substitutionselasticiteten, med værdier fra 0.02 til 3. De andre parametre er valgt som i det forrige Monte Carlo eksperiment⁶, og som før er eksperimentet udført både for Törnqvistkædeprisindekset og Paaschekædeprisindekset.

Figur 2, viser de faktiske værdier af substitutionselasticiteten på x-aksen og de estimerede værdier på y-aksen. Hvis substitutionselasticiteten er esitmeret uden bias vil den røde linje følge 45-grader linjen. De punkterede linjer angiver 95% - konfidensintervallet på estimatet.

Figur 2. Monte Carlo eksperiment – Substitutionselasticitetsestimater for en CES-produktionsfunktion med Harrod neutralt teknologisk fremskridt. Paaschekædeprisindekset (venstre) og Törnqvistkædeprisindekset (højre)



De punkterede linjer angiver 95% - konfidensintervallet på sigma estimatet. 95% - konfidensintervallet for Törnqvistkædeprisindekset er for $\sigma = 0.97$ lig (17.159, -19.134) og for $\sigma = 1.02$ lig (26.642, -28.924).

Kilde: Egene beregninger.

Fra

Figur 2 ses det, at esimationen af substitutionselasticitets når denne er tæt på 1 giver det anledning til en bias. Det ses at Paascheindekset fra 0 gående imod 1 har en tendens til at resultere i et estimat af sigma med en negativ bias hvorimod der fra 1 og fremefter er en tendens til at biasen er positiv. I forhold til Törnqvistindekset ses det, at Paascheindekset har

⁶ $\gamma_1 = \gamma_2 = \log(0.5)$, $\lambda_1 = 0.1$ og $\lambda_2 = -0.1$

et større interval omkring 1 hvor sigma er estimeret med skævhed, med andre ord ser det ud til at Törnqvistprisindekset kun resulterer i en lille bias omkring 1. Törnqvistprisindekset giver dog anledning til meget stor usikkerhed i estimatet omkring 1, så meget at estimatet ikke er signifikant forskelligt fra nul på et 5% niveau. Dette kan betyde at man fejlagtigt, restrikerer Cobb Douglas produktionsfunktionen til en Leontief produktionsfunktion.

Konklusion

Notatet opstiller en CES-produktionsfunktion med 2 input og teknologisk fremskridt, der udover undersøges via Monte Carlo simulationer konsekvenserne af at bruge et Törnqvist eller et Paasche kædeprisindeks i stedet for det teoretisk korrekte CES-prisindeks i estimationen af denne CES produktionsfunktion.

Hvis den data genererende følger en CES-produktionsfunktion uden eller med Hicks neutralt teknologiske fremskridt ser det ud til at de alternative prisindeks ikke medfører nogen nævneværdig bias i estimaterne. Indeholder data derimod et Harrod neutralt teknologisk fremskridt, bliver estimatet af paramenterne for den optimale fordeling af inputs og det teknologiske fremskridt estimeret med stor bias.

Uafhængigt af det teknologiske fremskridt ser det ud til at estimatet af substitutionelasticiteten, hvis den ikke er tæt på 1, ikke giver anledning til en bias. Hvis data har en et Harrod neutralt teknologisk fremskridt og substitutionelasticiteten er tæt på 1 giver estimation med et Paascheprisindeks en større bias end estimation med et Törnqvistprisindeks, men estimaterne med Törnqvistprisindeks er dog mere usikkert bestemt.

Bilag 1. CES produktionsfunktion med 2 input.

I det følgende gennemgås løsningen af Lagrange-optimeringsproblemet, som fremkommer når man har en CES produktionsfunktion med 2 input og skal bestemme de optimale niveauer af produktionsfaktorer.

For et givet output, \bar{y}_t , ønsker brancherne at minimere udgifterne til input 1 og 2 (x_1, x_2).

Optimeringsproblemet er givet ved:

$$(0.12) \quad \min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\text{st.} \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} x_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}$$

Hvor p_1 og p_2 prisen på henholdsvis input 1 og 2, y er outputtet, x_1 og x_2 er de to inputfaktorer og hvor γ og σ er parametre. γ bestemmer den optimale fordeling af inputs og σ bestemmer den (konstante) substitutionselasticitet mellem inputs.

På baggrund af dette kan følgende Lagrangefunktion, L , opskrives:

$$(0.13) \quad L = p_1 x_{1,t} + p_2 x_{2,t} - \Gamma \left[\left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} x_{1,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} x_{2,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \bar{y}_t \right],$$

Hvor Γ er Lagrange multiplieren.

Første-ordensbetingelserne til Lagrangefunktion er givet ved:

$$(0.14) \quad \frac{\partial L}{\partial x_{1,t}} = p_{1,t} - \gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} x_{1,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \bar{y}_t = 0$$

$$(0.15) \quad \frac{\partial L}{\partial x_{2,t}} = p_{2,t} - \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} x_{2,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \bar{y}_t = 0$$

$$(0.16) \quad \frac{\partial L}{\partial \Gamma} = \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} x_{1,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} x_{2,t}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \bar{y}_t = 0$$

Fra ligning (0.14) og (0.15) fås det optimale forhold mellem produktionsfaktorerne:

$$(0.17) \quad \frac{x_{1,t}^*}{x_{2,t}^*} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{-\sigma}$$

Ligning (0.17) indsættes i udtrykket for \bar{y}_t , ligning (0.16) og man kan bestemme det optimale produktionsfaktorniveau $(x_{1,t}^*, x_{2,t}^*)$

$$(0.18) \quad x_{1,t}^* = \bar{y}_t \gamma_1^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$x_1^* = \bar{y}_t \gamma_1 \left(\left[\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}^{CES}} \right] \right)^{-\sigma}$$

$$(0.19) \quad x_{2,t}^* = \bar{y}_t \gamma_2^{\frac{1}{1-\sigma}} \left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{1-\sigma} + 1 \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \Leftrightarrow$$

$$x_2^* = \bar{y}_t \gamma_2 \left(\left[\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}^{CES}} \right] \right)^{-\sigma}$$

hvor $p_{12,t}^{CES}$ er et CES prisindeks, der er givet ved $p_{12,t}^{CES} = (\gamma_1 p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 p_{2,t}^{1-\sigma})^{1/(1-\sigma)}$.

Bilag 2. CES produktionsfunktion med 2 input og teknologisk fremskridt.

I det følgende gennemgås løsningen af Lagrange-optimeringsproblemet, som fremkommer når man har en CES produktionsfunktion med 2 input og teknologisk fremskridt og skal bestemme de optimale niveauer af produktionsfaktorer.

For et givet output, \bar{y}_t ønsker brancherne at minimere udgifterne til input 1 og 2 (x_1, x_2).

Optimeringsproblemet er givet ved:

$$(0.20) \quad \begin{aligned} & \min_{x_1, x_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ & \text{st.} \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_1 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} x_2 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y} \end{aligned}$$

På baggrund af dette kan følgende Lagrangefunktion, L , opskrives:

$$(0.21) \quad L = p_1 x_{1,t} + p_2 x_{2,t} - \Gamma \left[\left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_1 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} x_2 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \bar{y}_t \right],$$

Hvor Γ er Lagrange multiplieren.

Første-ordensbetingelserne til Lagrangefunktion er givet ved:

$$(0.22) \quad \frac{\partial L}{\partial x_{1,t}} = p_{1,t} - \gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} e^{\lambda_1 t \frac{\sigma-1}{\sigma}} x_{1,t}^{\frac{-1}{\sigma}} \bar{y}_t = 0$$

$$(0.23) \quad \frac{\partial L}{\partial x_{2,t}} = p_{2,t} - \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} e^{\lambda_2 t \frac{\sigma-1}{\sigma}} x_{2,t}^{\frac{-1}{\sigma}} \bar{y}_t = 0$$

$$(0.24) \quad \frac{\partial L}{\partial \Gamma} = \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_1 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} x_2 \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - \bar{y}_t = 0$$

Fra ligning (0.22) og (0.24) fås det optimale forhold mellem produktionsfaktorerne:

$$(0.25) \quad \frac{x_{1,t}^*}{x_{2,t}^*} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t(\sigma-1)} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{-\sigma}$$

Ligning (0.25) indsættes i udtrykket for \bar{y}_t , ligning (0.24) og man kan bestemme det optimale produktionsfaktorniveau ($x_{1,t}^*, x_{2,t}^*$)

$$\begin{aligned}
 & \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_{1,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} x_{2,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow \\
 & \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_{1,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} \frac{e^{\lambda_2 t(\sigma-1)}}{e^{\lambda_1 t(\sigma-1)}} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{-\sigma} x_{1,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow \\
 & \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_1 t} x_{1,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_2^{\frac{1}{\sigma}} \gamma_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \gamma_1^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} \frac{e^{\lambda_2 t(\sigma-1)}}{e^{\lambda_1 t(\sigma-1)}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{-\sigma} x_{1,t}^* \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow \\
 (0.26) \quad & x_{1,t}^* \left(\gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} \left(e^{\lambda_2 t} \frac{e^{\lambda_2 t(\sigma-1)}}{e^{\lambda_1 t(\sigma-1)}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{-\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t
 \end{aligned}$$

Bemærk at:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1^{\frac{1}{\sigma}} &= \gamma_1^{\frac{1}{\sigma} + 1 - 1} = \gamma_1^{1 + \frac{1-\sigma}{\sigma}} = \gamma_1^{1 - \frac{\sigma-1}{\sigma}} \\
 &= \gamma_1 \gamma_1^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}}
 \end{aligned}$$

Dette indsættes i ligning (0.26).

$$\begin{aligned}
 & x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} \left(\gamma_1 e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma}} + \gamma_2 \left(e^{\lambda_2 t} \frac{e^{\lambda_2 t(\sigma-1)}}{e^{\lambda_1 t(\sigma-1)}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{-\sigma} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow \\
 (0.27) \quad & x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} \left(\gamma_1 e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma}} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t \frac{\sigma-1}{\sigma}} \frac{e^{\lambda_2 t(\sigma-1) \frac{\sigma-1}{\sigma}}}{e^{\lambda_1 t(\sigma-1) \frac{\sigma-1}{\sigma}}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t
 \end{aligned}$$

Bemærk at:

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma}} &= e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma} + \lambda_1 t(\sigma-1) - \lambda_1 t(\sigma-1)} = e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1) - \sigma \lambda_1 t(\sigma-1)}{\sigma}} = e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)(1-\sigma)}{\sigma}} \\
 &= e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} e^{-\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)(\sigma-1)}{\sigma}}.
 \end{aligned}$$

Dette indsættes i ligning (0.27):

$$x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} \left(\gamma_1 \frac{e^{\lambda_1 t(\sigma-1)}}{e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)(\sigma-1)}{\sigma}}} + \gamma_2 e^{\frac{\lambda_2 t \sigma - 1}{\sigma}} \frac{e^{\frac{\lambda_2 t(\sigma-1)\sigma-1}{\sigma}}}{e^{\frac{\lambda_1 t(\sigma-1)\sigma-1}{\sigma}}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow$$

$$(0.28) \quad x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} + \gamma_2 e^{\frac{\lambda_2 t \sigma - 1}{\sigma}} e^{\frac{\lambda_2 t(\sigma-1)\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t$$

Bemærk at:

$$e^{\frac{\lambda_2 t \sigma - 1}{\sigma}} e^{\frac{\lambda_2 t(\sigma-1)\sigma-1}{\sigma}} = e^{\frac{\lambda_2 t \sigma - 1}{\sigma} + \frac{\lambda_2 t(\sigma-1)\sigma-1}{\sigma}} = e^{\frac{\lambda_2 t(\sigma-1) + \lambda_2 t(\sigma-1)(\sigma-1)}{\sigma}} = e^{\frac{\lambda_2 t((\sigma-1) + (\sigma-1)(\sigma-1))}{\sigma}} = e^{\frac{\lambda_2 t(\sigma^2 - \sigma)}{\sigma}} = e^{\lambda_2 t(\sigma-1)}$$

Dette indsættes i ligning (0.28):

$$x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow$$

$$x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{1,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{1,t}} \right)^{1-\sigma} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow$$

$$(0.29) \quad x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(p_{1,t}^{-(1-\sigma)} \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} p_{2,t}^{1-\sigma} \right) \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t$$

CES prisindekset defineres som:

$$(0.30) \quad p_{12,t} = \left(\gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} p_{2,t}^{1-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

CES prisindekset indsættes i ligning (0.29) :

$$x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(p_{1,t}^{-(1-\sigma)} p_{12,t}^{(1-\sigma)} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t \Leftrightarrow$$

$$x_{1,t}^* \gamma_1^{-1} e^{-\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{1,t}^{(\sigma-1)}}{p_{12,t}^{(\sigma-1)}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{y}_t$$

Det optimale produktionsfaktorniveau for $x_{1,t}^*$ er herved givet:

$$(0.31) \quad x_{1,t}^* = \bar{y}_t \gamma_1 e^{\lambda_1 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}} \right)^{-\sigma}$$

På lignende måde kan det optimale produktionsfaktorniveau for $x_{2,t}^*$ findes til:

$$(0.32) \quad x_{2,t}^* = \bar{y}_t \gamma_2 e^{\lambda_2 t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{2,t}}{p_{12,t}} \right)^{-\sigma}$$

Antages et Hicks- neutral teknologisk fremskridt gælder det:

$$(0.33) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

Det optimale forhold mellem produktionsfaktorerne reduceres til:

$$(0.34) \quad \frac{x_{1,t}^*}{x_{2,t}^*} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right) \left(\frac{p_{1,t}}{p_{2,t}} \right)^{-\sigma}$$

Det optimale produktionsfaktorniveau af $x_{1,t}^*$ under antagelsen omkring et Hicks- neutral teknologisk fremskridt, findes ved at indsætte antagelsen (0.33) i ligning (0.31):

$$(0.35) \quad x_{1,t}^* = \bar{y}_t \gamma_1 e^{\lambda t(\sigma-1)} \left(\frac{p_{1,t}}{e^{-\lambda t} (\gamma_1 p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 p_{2,t}^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}} \right)^{-\sigma} \Leftrightarrow$$

$$x_{1,t}^* = \bar{y}_t \gamma_1 e^{-\lambda t} \left(\frac{p_{1,t}}{p_{12,t}^{CES}} \right)^{-\sigma}$$

Hvor CES prisindekset er givet ved: $p_{12,t}^{CES} = (\gamma_1 p_{1,t}^{1-\sigma} + \gamma_2 p_{2,t}^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$.

Bilag 3. Monte Carlo – Intet teknologisk fremskridt.

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.000	0.000
$mean(\beta)$	-0.689	-0.689	-0.799	0.000	0.000
$std(\beta)$	0.008	0.008	0.040	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.000	0.000
$mean(\beta)$	-0.693	-0.693	-0.799	0.000	0.000
$std(\beta)$	0.007	0.007	0.041	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.000	0.000
$mean(\beta)$	-0.672	-0.672	-1.783	0.001	0.001
$std(\beta)$	0.015	0.014	0.042	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.000	0.000
$mean(\beta)$	-0.693	-0.693	-1.800	0.000	0.000
$std(\beta)$	0.008	0.008	0.040	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Bilag 4. Monte Carlo – Hicks neutralt teknologisk fremskridt.

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.100	0.100
$mean(\beta)$	-0.689	-0.689	-0.798	-0.100	-0.100
$std(\beta)$	0.008	0.008	0.040	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.100	0.100
$mean(\beta)$	-0.693	-0.693	-0.800	-0.100	-0.100
$std(\beta)$	0.007	0.007	0.040	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.100	0.100
$mean(\beta)$	-0.672	-0.672	-1.783	-0.099	-0.099
$std(\beta)$	0.015	0.015	0.042	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.100	0.100
$mean(\beta)$	-0.693	-0.693	-1.799	-0.100	-0.100
$std(\beta)$	0.008	0.008	0.040	0.000	0.000
$mean(v)$	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000

Bilag 5. Monte Carlo – Harrod neutralt teknologisk fremskridt.

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.100	-0.100
$mean(\beta)$	-1.406	-1.494	-0.924	0.036	0.076
$std(\beta)$	0.119	0.077	1.016	0.003	0.001
$mean(v)$	0.004	0.003	0.095	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-0.800	0.100	-0.100
$mean(\beta)$	-1.414	-1.499	-0.805	0.036	0.076
$std(\beta)$	0.118	0.076	1.024	0.003	0.001
$mean(v)$	0.004	0.004	0.096	0.000	0.000

Paasche	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.100	-0.100
$mean(\beta)$	0.507	0.401	-1.734	-0.094	-0.254
$std(\beta)$	0.088	0.135	0.770	0.001	0.003
$mean(v)$	0.002	0.003	0.047	0.000	0.000

Törnqvist	γ_1	γ_2	σ	λ_1	λ_2
β	-0.693	-0.693	-1.800	0.100	-0.100
$mean(\beta)$	0.488	0.388	-1.791	-0.094	-0.254
$std(\beta)$	0.093	0.131	0.746	0.001	0.003
$mean(v)$	0.002	0.003	0.046	0.000	0.000